

Feuille 4
Intégration, espérance des variables aléatoires réelles

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications boréliennes de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. Dans les cinq cas suivants, montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda)_n$ converge et déterminer sa limite :

- (1) $f_n(x) := \frac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$.
- (2) $f_n(x) := \frac{ne^{-nx}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$.
- (3) $f_n(x) := (1 - \frac{x}{n})^n$.
- (4) $f_n(x) := \sin(nx) \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.
- (5) $f_n(x) := |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x}$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{A}$ -mesurable positive. Montrer que

$$\int_X f d\mu = 0 \text{ si et seulement si } f \text{ est négligeable, i.e., } f = 0 \text{ } \mu - p.p.$$

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(1) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f| > n\}} d\mu = 0.$$

(2) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

(continuité de l'intégrale par rapport à la mesure).

Exercice 4. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si la loi de X est à densité $f = k \mathbb{1}_{[a,b]}$ pour un réel $k \geq 0$.

- (1) (a) Déterminer k .
- (b) Calculer la fonction de répartition F_X de X .
- (c) Calculer l'espérance et la variance de X .
- (2) On se place dans l'espace probabilisé $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda_{[0,1]})$. On considère la v.a. (faire un dessin rapide)

$$\begin{cases} Y : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \begin{cases} 2x \text{ si } x \leq 1/2 \\ 2x - 1 \text{ si } x > 1/2 \end{cases} \end{cases}.$$

Soit $a \in [0, 1]$. Montrer que $\lambda_{[0,1]}(Y \leq a) = \lambda_{[0,1]}(2x \leq a \text{ et } x \leq 1/2) + \lambda_{[0,1]}(2x - 1 \leq a \text{ et } x > 1/2)$. En déduire l'expression de la fonction de répartition F_Y et conclure que Y suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Pour $t > 0$, on pose $S_f(t) := \{x \in X : f(x) > t\}$ et $\Psi_f(t) := \mu(S_f(t))$. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \Psi_f(t) dt.$$

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

- (1) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ p.p.
- (2) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $F \subset \mathbb{R}$ fermé tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in F.$$

- (a) Soit $I \subset F^c$ un intervalle ouvert. Montrer que $\mu(f^{-1}(I)) = 0$.
- (b) En déduire que $f(x) \in F$ pour presque tout x .

Lemme de Fatou

Exercice 7.

- (1) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f . On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sup_n \int_X f_n d\mu \leq K.$$

Montrer que $\int_X f d\mu \leq K$.

- (2) On considère sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1], \lambda))$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par $f_{2n} = \mathbb{1}_{[0, 1/2]}$ et $f_{2n+1} = \mathbb{1}_{[1/2, 1]}$. Calculer $\int \limsup_n f_n d\lambda$ et $\limsup_n \int f_n d\lambda$.

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur X mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f μ -p.p., et que :

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu < +\infty.$$

Montrer que $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Calcul d'intégrales

Exercice 9. On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Calculer l'intégrale

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

et en déduire que f est une densité de probabilité.

Exercice 10. (1) Justifier pourquoi l'intégrale $I := \int_{[0,1]} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ est bien définie.

- (2) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy.$$

- (3) En déduire :

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx dy.$$

- (4) En inversant les rôles de x et y , en déduire :

$$2I = \int_{[0,1]^2} \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy.$$

- (5) En déduire que :

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Exercice 11. On considère le huitième de disque $D := \{(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/4\}$. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale :

$$I := \int_D \frac{y}{x} dx dy.$$

Moments d'une variable aléatoire et inégalités

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^n est intégrable et calculer $E(X^n)$.

Exercice 13. Soit $\lambda > 0$ un réel. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ . Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X^n est intégrable et calculer $E(X^n)$.

Exercice 14. Soient X et Y des variables aléatoires réelles. Soit $a > 0$ un réel. Montrer que

$$P(X \geq a, Y \geq a) \leq \frac{E(X^2 Y^2)}{a^4}.$$

Exercice 15. Soit X une v.a. à valeurs dans $[0, +\infty[$, et soit $h:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ une fonction croissante. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(h(X))}{h(a)}.$$